

3. cvičení - teorie

Definice (Parciální derivace). Necht' f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}\end{aligned}$$

nazýváme *parciální derivací (prvního řádu) funkce f* podle j -té proměnné v bodě a (pokud limita existuje).

Značení 1. Derivaci funkce f podle j -té proměnné značíme mimo jiné také jako f'_{x_j}

Parciální derivace počítáme v podstatě tak, že jiné proměnné, než je x_j bereme jako čísla.

Fakt 2. Aritmetika derivací proto funguje pořád stejně.

$$\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\end{aligned}$$

Definice. Funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v k -té proměnné v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pokud $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + te_k) = f(a)$

Fakt. Je-li funkce f spojitá v bodě a v k -té proměnné, pak co se výpočtu $f'_k(a)$ týče, můžeme používat věty z minulého semestru - např. větu 44.

Definice. Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$, $a \in G$, $f \in \mathbb{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$$

je *tečná nadrovina* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Definice. Necht' $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$, pak množinu $[f = c]$ ¹ nazýváme *vrstevnicí funkce f ve výšce c* .

¹Užíváme notaci $[V(x)] = \{x \in \mathbb{R}^n: V(x)\}$.

Návod

- $D(f)$ - určit a nakreslit
- určit, zda je funkce definovaná po větvích - v tom případě si nakreslím množiny, na kterých má různé předpisy
- zjistím, zda a kde je funkce spojitá (potřeba např. k větě 44)
- ve vnitřcích získaných množin vypočítám parciální derivace
- pokud je funkce na hranicích množin definována, spočtu zde derivace zvlášť - z definice/dle věty 44.
 - Aby parciální derivace dávala smysl, musí být funkce definována na úsečce procházející daným bodem v příhodném směru (např., pokud funkce není těsně nad bodem x definována, nemá smysl tam počítat derivaci podle y .)